

Erfjord, Hundeland

Lærere lærer sammen

Innledning

Denne artikkelen viser hvordan lærere gjennom et læringsfellesskap kan utvikle sin egen matematikkundervisning. Vårt utgangspunkt er at man ikke er ferdig utlært når man har fullført sin lærerutdanning, ei heller etter å ha undervist en tid. Som lærer har man hele tiden behov for å utvikle nye erfaringer om hva som er gode og mindre gode måter å undervise på (Grevholm, 2013).

Det er en utfordring i en travel hverdag å få tid til å reflektere over egen undervisning. Dessuten ser man den som regel kun fra sitt eget perspektiv, noe som gjør det vanskelig å vurdere hvordan undervisningen oppfattes fra elevenes perspektiv. Hvis man derimot samarbeider med kolleger, kan man observere og få innspill om hva som preger egen undervisning, og hva som eventuelt kan endres til det bedre.

Denne artikkelen handler om en gruppe lærere som har et mål om sammen å utvikle matematikktimene sine på ungdomsskolen.

Ingvald Erfjord

Universitetet i Agder
ingvald.erfjord@uia.no

Per Hundeland

Universitetet i Agder
per.s.hundeland@uia.no

Dette gjøres gjennom en spesifikk samarbeidsmodell som det redegjøres for. Videre drøftes effekten et slikt samarbeid kan ha. Målet for lærerne var å finne måter å implementere digitale verktøy i matematikkundervisningen på, som de dessuten ønsket skulle preges av en utforskende og problemløsende atmosfære. Det vil si at det skulle tilrettelegges for at elevene kunne utforske både matematiske problemstillinger og måter å bruke digitale verktøy på som redskap i arbeidsprosessen.

Digitale verktøy i matematikkundervisningen

Lærerne i studien deltar i prosjektet «Digital interaktiv matematikkundervisning» (heretter kalt DIM). To skoler, Ve skole og Samfundets skole, samarbeider med Universitetet i Agder om å utvikle undervisningsopplegg i matematikk for hele ungdomstrinnet. Digitale verktøy kan bidra direkte til matematikken, slik som et regneark, et dynamisk matematikkprogram (GeoGebra) eller en lommeregner gjør. I DIM brukes digitale verktøy også i en bredere forstand. Læringsplattformer, delingssteder som Google disk, digitale nettbrett (iPad) og digitale tavler blir brukt i kommunikasjonen mellom elevene og mellom elever og lærer.

Lære sammen

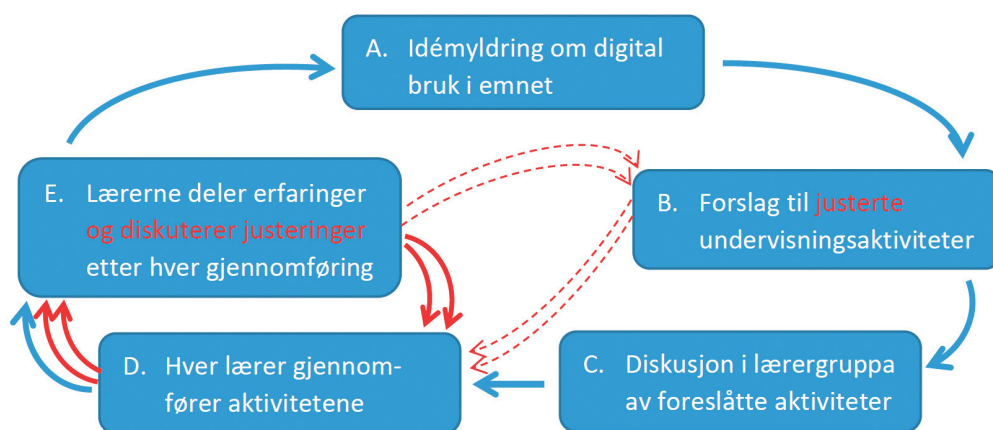
I løpet av prosjektperioden har lærerne på omgang designet forslag til undervisningsak-

tiviteter innenfor ulike matematiske emner. Hvert emne gis gjerne et tidsomfang på 3–4 uker, og de digitale aktivitetene i undervisningen utgjør en betydelig del av dette. Forslagene til undervisningsaktiviteter blir delt med de andre lærerne i prosjektet på en plattform (Google-disk). Deretter møtes lærerne for å drøfte detaljer og endringsforslag. Etter at undervisningsaktivitetene er «godkjent», gjennomfører lærerne disse i sine klasser. På neste møte blir de gjennomførte aktivitetene diskutert og erfaringer utvekslet, før erfaringer fra dette tas med inn i planlegging av en ny designsyklus. En slik syklus blir i den artikkelen kalt DIM-syklusen. Ferdige undervisningsaktiviteter publiseres fortløpende på DIM-prosjektets nettside: <http://www.dim2015-18.no/>.

DIM-syklusen har praktiske begrensninger for hvor detaljert erfaringsdeling det er mulig å få til mellom lærerne. Lærerne ønsket å få til en mer systematisk læringsprosess. En nærliggende parallell til det som var ønsket, finner vi i det som ofte omtales som «lesson study» (Alston, Pedrick, Morris og Basu, 2011; Stiegler og Hiebert, 1999), slik det blant annet gjennomføres i Japan. Der møtes en gruppe lærere jevnlig med formål å utvikle undervisningen. En kortversjon av en «lesson study»-sekvens kan skisseres opp slik:

- 1) Man blir enig om et problem eller en utfordring som gruppa skal arbeide med.
- 2) Gruppa planlegger en undervisningsøkt. I en «lesson study» kan denne prosessen ta lang tid, både uker og måneder.
- 3) Undervisningsopplegget gjennomføres av en av lærerne i gruppa, de andre lærerne observerer. Siden alle har vært deltakende i prosessen med å utvikle undervisningsopplegget, er fokuset mest på undervisningsopplegget og ikke spesifikt på læreren. Alle føler derfor eierskap til resultatet, både når det går bra og dårlig.
- 4) Undervisningsopplegget evalueres og justeres der det er behov for dette. Deretter gjennomføres det en ny undervisningsøkt med en annen elevgruppe og en annen lærer.
- 5) Ny evaluering gjennomføres neste gang gruppa møtes. Nye justeringer foreslås. Resultatene fra hele prosessen deles med andre lærere, både lokalt og nasjonalt gjennom ulike formidlingskanaler.

Lærerne døpte sin «lesson study»-pregede sekvens for «DIM-trippel» siden den involverte tre lærere som skulle drive samme undervisningsaktivitet i tre ulike niendeklasser. I figur 1 er den opprinnelige DIM-syklusen illustrert



Figur 1: Modell av DIM-trippelen for planlegging og gjennomføring av undervisningsaktiviteter

med blå bokser, blå piler og hvit tekst. De røde pilene og den røde teksten illustrerer de justeringene som DIM-trippelen innebar, der det etter hver gjennomføring var en samtale der erfaringer og forslag til justeringer til neste gjennomføring ble diskutert. Dette resulterte også i mindre justeringer på selve undervisningsaktiviteten slik det er illustrert med prikket pil via punkt B.

I DIM-trippelen vi ser på, gjennomførte lærerne undervisningsaktiviteten mens de andre lærerne i prosjektet og forskere fra Universitetet i Agder deltok som observatører og i refleksjonssamtale etter timene. Der ble timen diskutert; blant annet drøftet man hva som hadde fungert bra, og hva som eventuelt burde endres. Den læreren som stod for tur til å ha undervisningsaktiviteten, fikk med seg mange råd til sin detaljplanlegging. I en original «lesson study» ville gruppa på dette tidspunktet arbeidet kollektivt videre med redesign av undervisningsaktiviteten før ny gjennomføring. Denne fasen ble av praktiske årsaker kraftig redusert, og ansvaret for redesign ble lagt på den læreren som stod for tur til å undervise. Samme prosess ble gjennomført etter andre og tredje undervisningsøkt.

Matematikkproblemet

DIM-trippelen i denne artikkelen tok utgangspunkt i et matematikkproblem (se figur 2) som skulle være en introduksjonsaktivitet til temaet overflate og volum på 9. trinn, og som ble utviklet som skissert i figur 1, trinn a)–c).

Den matematiske utfordringen i første del av opplegget er å finne ut hvor mye man skal klippe bort for å få størst mulig volum på esken.

Undervisningsaktiviteten åpner for ulike tilnærminger. Starten hvor elevene bruker papir og saks, gir en lav inngangsterskel til det matematiske problemet, og det er en relativ lett utfordring å beregne volumet av en konkret eske når man vet alle lengdene. Elevene kan lage ulike esker hvor de hver gang klipper ut kvadrater

a) Brette esker

Av ett A4-ark kan vi lage en eske uten lokk. Klipp bort et kvadrat i hvert hjørne av arket. De fire kvadratene som klippes bort, skal være like store. Brett opp de fire flippene så de blir vegger i esken. Bruk eventuelt teip til å feste hver flipp til naboflippene for å hindre at de legger seg ned igjen. Hvor stort volum klarer dere å lage?

b) Overflate og volum

Har esken som har størst volum, også størst overflate?

c) Funksjonsuttrykk

Finn et funksjonsuttrykk for volumet av esken som funksjon av sidekanten i kvadratene som er klippet bort. Tegn grafen i GeoGebra.

Figur 2: Kopi av oppgavearket til undervisningsøkten



Figur 3: Elever prøver ut ulike størrelser på klipp og beregner volum

med ulike størrelser. Oppgaven gir mulighet til å systematisere ved at elevene kan registrere ulike resultater, slik det er illustrert i figur 4, og viser at volumet er størst hvis man klipper bort kvadrater med sidelengde et sted mellom 4 og 4,5 cm.

På dette tidspunktet er det mulig å integrere digitale verktøy i problemløsningsprosessen.

Klippilengde	Volum av esken
2	873,8
3	1066,5
4	1128,4
5	1083,5
4,5	1117,8

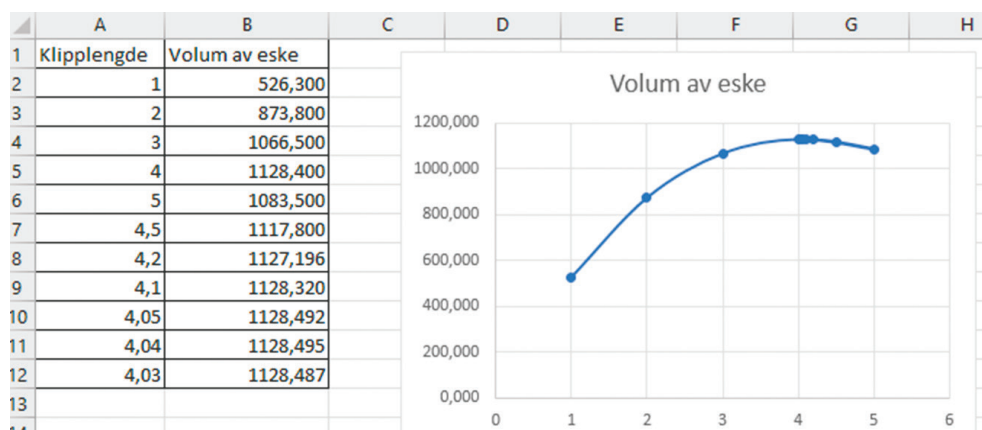
Figur 4: Elever prøver ut ulike størrelser på klipp og beregner volum

Elevene kan ta utgangspunkt i volumformelen $V = \text{lengde} \cdot \text{bredde} \cdot \text{høyde}$ for en eske og lage en algebraisk formel for volumet. Denne forme-

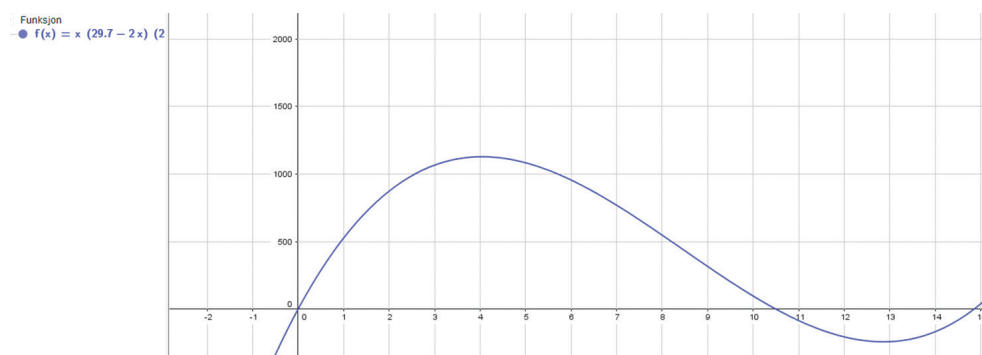
len kan ved hjelp av regneark generere volum for ulike verdier av utklippslengden, og det kan lages diagram, slik det er vist i figur 5.

En tredje mulighet kan være å anvende et funksjonsuttrykk i en graftegner (f.eks. GeoGebra) for deretter å få fram et toppunkt på grafen (figur 6). Dette toppunktet vil da gi den klippelengden som gir den største esken.

DIM-prosjektet fokuserer på at matematikk læres best ved en undersøkende og problembasert tilnærming til lærestoffet. Det er derfor viktig for lærerne i prosjektet at de ikke stresser én måte å gjøre ting på. En viktig rettesnor for å arbeide problembasert er at elevene får mulighet til (1) å forstå problemet, (2) lage en plan og gjennomføre den, (3) se tilbake og reflektere, (4) utvide og generalisere. Dette er de anbefalinger



Figur 5: Volum av eske ved ulike klipp og diagram over disse laget ved hjelp av regneark



Figur 6: Volum av eske som funksjon av klippilengde laget ved hjelp av GeoGebra

som Polya ga for å gjennomføre en fruktbar problemløsningsprosess (Polya 1957). Fasene (1) og (2) ble i stor grad overlatt til elevene, mens (3) og (4) til en viss grad ble planlagt gjort i samarbeid med lærer, enten underveis eller som del av oppsummeringen på slutten av økten.

Læring fra gjennomføringen

Undervisningsopplegget ble gjennomført i tre niendeklasser. De to første øktene ble gjennomført på slutten av en skoledag og på formiddagen påfølgende dag, slik at det var liten praktisk mulighet for å gjøre omfattende endringer fra den første økten til den andre. Den tredje økten ble gjennomført 6 dager etter andre økt.

De tre undervisningsøktene har mye felles, noe som er naturlig da de bygger på samme utgangspunkt og gjennomføres av lærere som samarbeider tett om innholdet i matematikkundervisningen. Vi ser imidlertid spesielt på justeringer av undervisningsaktiviteten fra de to første gjennomføringene til den siste. For enkelhets skyld sammenligner vi derfor den første økten med den tredje for å gi et bilde av den utviklingen som skjedde, og de refleksjonsprosessene lærerne gikk gjennom som et resultat av samarbeidet i DIM-trippelen.

Undervisningsøkt 1

Læreren introduserte oppgaven på en digital tavle. Elevene fikk utdelt papir og saks som hjelpemiddel til å lage esker og arbeidet deretter to og to i om lag en klokke time. Flere lærere gikk rundt og hjalp gruppene. Vi observerte at lærerne brukte utforskende spørsmål, ga elevene noen hint og forsøkte å få dem til å systematisere de funnene de gjorde. Noen elever fikk hjelp til å plote punkter eller formulere en formel for volum i et GeoGebra-koordinatsystem.

Den siste halvtimen brukte læreren til en oppsummering i plenum der elevene ble spurt om å vise hva de hadde funnet fram til, og hvordan. En elevgruppe projiserte en GeoGebra-fil tilsvarende den i figur 6 fra sitt nettbrett opp på den digitale tavlen. Andre

elever presenterte en tabell fra Google regneark tilsvarende den som er vist på figur 5. På spørsmål fra læreren illustrerte en av elevene med papir hva som skjedde dersom man klippet for mye i hjørnene, slik at det ikke lenger var mulig å brette en eske. Dette ble gjort helt på slutten av undervisningsøkten slik at det ikke ble tid til å sammenligne dette resultatet med dets analogi i grafen (se figur 6), der hvor den har nullpunktene (0 som betyr ingen klipp, 10,5 hvor alt på kortsiden av arket er klipt bort, og 14,85, der hele langsiden er klipt bort). Avslutningsvis introduserte læreren størrelsen x som klipp og forklarte innholdet i formelen $y = (29,7 - 2x)(21 - 2x)x$, som lå til grunn for formelen i regnearket og grafen i GeoGebra.

Samtale etter undervisningsøkt 1

En observasjon som kom fram i samtalen, var at elevene brukte mye tid på det som ble omtalt som systematisk utforskning av problemet ved at de klippet og lagde esker. En problemstilling som ble diskutert, var hvordan man kunne fått elevene over i en mer utforskende modus. Et forslag som ble drøftet, var om man som lærer bør avbryte prosessen tidligere og spørre elevene om de hadde noen hypoteser om hvordan problemet kunne løses. Dette forslaget ble veid mot verdien av at elevene selv måtte få tilstrekkelig tid til å reflektere over problemet og selv få muligheten til å tenke ut mulige strategier for å finne løsninger. Ved å lansere hypoteser i plenum var det en fare for at flinke elever raskt ville gi en riktig løsning og på den måten forringe de andre elevenes tankeprosess.

Opgavearket inneholdt også to andre utfordringer (figur 2, punkt b) og c)). Kun et fåtall rakk å se nærmere på disse. Det ble foreslått at man kanskje burde redusere undervisningsopplegget til kun å handle om volum av esken (punkt a).

En annen utfordring gjaldt bruk av digitale verktøy. Det ble observert at mange elever ikke kom så langt at de fikk brukt verken regneark eller GeoGebra. Lærerne så en sammenheng

hvor det at elevene fikk systematisert mer, kunne føre til at bruken av digitale verktøy økte. En idé som ble nevnt, var at læreren kunne gi elevene et skjema hvor de kunne fylle ut med lengder og tilhørende eskevolum etter hvert som de brettet esker. Dette kunne i neste omgang inspirere elevene til bruk av regneark.

Det ble også diskutert hva som kunne anses å være målet med undervisningsopplegget. Læreren som nettopp hadde gjennomført undervisningsøkten, stadfestet at det matematiske målet var å kunne regne ut volumet av et prisme. Andre foreslo prosessmål som at elevene skal få laget en grafisk framstilling av problemet og deretter kunne tolke seg fram til en løsning på problemet.

Lærer 3 påpekte at man som lærer har en tendens til å lede elevene for raskt inn på den algoritmiske tilnærmingen med formel, og at elevene på den måten mistet begrepsforståelsen. Han hadde stilt noen kontrollspørsmål til en elevgruppe, og de hadde hatt vansker med å redegjøre for volumformelen til prisme i forhold til formlene for pyramide. Han fortalte at han ofte opplevde at elevene blandet volumbegrepet og arealbegrepet når han selv trodde de behersket dette, noe som er dokumentert som et kjent problem for elever (se Grevholm, 2013). Han fortalte at han i sin undervisningsøkt ville legge vekt på volumbegrepet ved å fokusere på at volum er antall en-kubikks terninger det er plass til i esken, og ikke ha så sterkt fokus på beregning av volum fra formel.

Samtalen endte ikke opp i noen klare konklusjoner, men fungerte som en utveksling av synspunkter og erfaringer. Eventuelle justeringer ble overlatt til de neste lærerne som skulle gjennomføre undervisningsaktiviteten. Som nevnt observerte vi kun mindre justeringer i gjennomføringen av undervisningsøkt 2, men litt større endringer i undervisningsøkt 3.

Undervisningsøkt 3

Lærer 3 startet økten med en plenumssamtale der forskjell mellom kvadrat og kubikk ble kom-

mentert, og læreren tegnet opp et 5 cm x 10 cm rektangel på tavla og spurte om arealet. Svaret 50 ble problematisert utover selve algoritmen for å regne det ut. Dette var i tråd med de ideene læreren presenterte på refleksjonsmøtet en uke tidligere.

Oppgaven ble introdusert på en litt annen måte enn i de forrige to øktene. Oppgavearket ble ikke presentert, men i stedet viste læreren fram et A4-ark og klippet ut fire kvadrater, ett i hvert hjørne. Deretter ble det lagt inn et konkurranselement i aktiviteten ved å utfordre elevene til å lage den største esken.

Etter en halv times arbeid ble klassen samlet til en midtveisoppsummering på cirka 15 minutter. Dette var i tråd med forslag som ble diskutert en uke tidligere i lærersamtalen. Læreren ba gruppe for gruppe lese opp ett resultat hver fra eskeproduksjonen, dvs. lengden på kvadratet de hadde klippet ut, og det tilhørende volumet som de hadde regnet ut. Lærer 3 satte resultatene inn i en forhåndstegnet tabell på den elektroniske tavlen og avsluttet midtveisoppsummeringen med å oppfordre elevene til å bruke regneark eller GeoGebra som hjelpemiddel for å systematisere sine funn. Her tok læreren igjen opp tråden fra lærersamtalen en uke tidligere og styrte elevene mot mer systematisk utforskning med støtte i bruk av digitale verktøy. Flere elevgrupper fikk i arbeidsøkten hjelp til å bruke regneark for å systematisere resultatene og legge inn formel for volum i regnearket.

Økten ble avsluttet med en felles oppsummering der alle gruppene presenterte fra arbeidet sitt. Dette ble hovedsakelig gjort ved at elevene brukte sine nettbrett og projiserte det de hadde gjort, på en digital tavle. Læreren kommenterte og grep for eksempel fatt i tallet 4,043 cm, som en gruppe hevdet var det korrekte utklippet for å maksimere volumet. Læreren spurte elevene om hva som var forskjellen på tallet 4,043 og tallet 4,04, som en annen gruppe hadde oppgitt som korrekt løsning. Videre ble regnearkkodingen diskutert, og grafene som framkom på skjermen, ble samtalt om. Det ble

problematisert at bare deler av grafen er innenfor et gyldighetsområde for eskeproblemet, tilsvarende som diskusjonen initiert av lærer 1 en uke tidligere med støtte i en graf i GeoGebra.

Samtale etter undervisningsøkt 3

Samtalen startet med at midtveisoppsommeringen ble kommentert. De to andre lærerne mente at den bidro til et fokus på systematikk og bruk av digitale verktøy i utforskningen, og de ga uttrykk for at dette var noe de ville ta med seg til neste gang de skulle gjennomføre en liknende undervisningsaktivitet. Lærer 3 var imidlertid i tvil om det hadde gått for mye tid med til denne oppsummeringen på bekostning av tid til fri utforskning. Balansegangen mellom fri utforskning og lærerstyrt aktivitet ble igjen et tema uten at man kom til noen bestemt konklusjon. Det ble også poengtert at det ble noe hektisk i den avsluttende oppsummeringen, der alle gruppene presenterte. Det ble stilt spørsmål om man kunne nøyd seg med å plukke ut et utvalg som kunne brukes til å få fram de faglige målene læreren hadde for undervisningsaktiviteten. Her var det argumenter begge veier, der motargumentet var at det var stas for elevene å få legge fram sitt arbeid.

Diskusjon: Hva har lærerne lært gjennom en slik prosess?

Vi viste tidligere i artikkelen til «lesson study»-metodikk. DIM-trippelen har visse likheter med en slik måte å jobbe på: En gruppe lærere har felles mål om å videreutvikle sin undervisning for å fremme bedre matematikklæring. Som i «lesson study» inneholdt DIM-trippelen en læringssyklus hvor man (1) sammen utvikler noe, (2) deretter forsøker dette ut, (3) reflekterer over resultatet, (4) for deretter prøve ut et justert opplegg, og (5) reflektere over resultatet etter ny gjennomføring.

Det er imidlertid også noe som skiller vår trippel fra en «lesson study»-sekvens, primært tidsaspektet og innsatsen som legges ned i å utvikle undervisningsaktiviteten. I en «origi-

nal» «lesson study»-gruppe vil lærerne møtes regelmessig for å utvikle et bestemt undervisningsopplegg for eksempel introduksjon av brøk. Over en lengre periode og i flere møter vil gruppa diskutere mål for en slik undervisningsøkt, de vil konsultere forskning og andre læreres erfaringer og så planlegge undervisningsopplegget i minste detalj. Etter å ha gjennomført opplegget vil de jobbe videre med nye justeringer og ny utprøving. I løpet av et arbeidsår vil en slik gruppe kanskje kun ha planlagt og gjennomført 1–3 undervisningsopplegg. I Japan har de et godt system for å videreformidle erfaringer fra slike «lesson studies», slik at det er gode muligheter for å lære av hverandre. Et viktig spørsmål er om det er mulig å få til et tilsvarende system blant norske lærere?

Hva kan man si at lærerne oppnådde i sin DIM-trippel? Selv om det var begrenset i tid og innsats, oppnådde lærerne at de sammen fikk tid til å reflektere over ulike sider ved undervisningsaktiviteten og måter å gjennomføre den på. Dette gjaldt både hvor mye elevene skal arbeide, hvor mye læreren skal styre, hvordan oppgaver bør lages og presenteres i klasserommet, og hvordan man kan fremme digitale verktøy som en del av undervisningsprosessen. Videre vil vi framheve de diskusjonene som foregikk i gruppa om overordnede pedagogiske aspekter. Dette gjaldt for eksempel hvordan man kan fremme en undersøkende og problemorientert matematikkundervisning, hvordan kommunikasjonen bør foregå i matematikkundervisningen, og hvordan digitale verktøy kan komme naturlig inn i undervisningen. Man var enig om at undervisningsopplegget som ble gjennomført, ikke var avhengig av digitale verktøy, men at man ved å ta dem i bruk ville få en merverdi i form av mer effektivitet i utforskningen av mulige løsninger. Det var også svært tydelig at lærerne opplevde hele prosessen som lærerik og motiverende. Det å avsette tid til å samarbeide om matematikkundervisning på den måten hadde en egenverdi.

Trenden i norsk utdanning er å stille høyere

kompetansekrav til lærerne. Blant annet kreves det nå minst ett års utdanning i matematikk for å være kvalifisert for å undervise i matematikk på ungdomstrinnet. Den ordningen bygger muligens på en hypotese om at økt formell utdanning vil føre til bedre kvalitet i undervisningen. Det er ikke sikkert at denne hypotesen er den eneste sannhet man bør støtte seg på. Utdanning i det faget man underviser, er en *nødvendig* forutsetning for å kunne gi god undervisning, men det er ikke en *tilstrekkelig* forutsetning for at god undervisning oppnås. Undervisning er en kulturell aktivitet hvor lærere gradvis har utviklet og tatt opp i seg tanker om hvordan undervisning bør foregå. Dette tankesettet er ikke noe som enkelt endres gjennom et videreutdanningsopplegg eller et kompetanseløft fra myndighetene. Undervisning må endres gradvis gjennom læreres egen læring (Stiegler og Hiebert, 1999). Dette kan oppnås ved at matematikklærere får tid, og at

det tilrettelegges for samarbeid som er godt planlagt, er regelmessig og går over lang tid. DIM-trippelen viser et eksempel på et tiltak som kan være utviklende for læreres streben etter å høyne kvaliteten på egen undervisning.

Referanser

- Alston, A. S., Pedrick, L., Morris, K. P. & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers' close attention to students' mathematical thinking. I L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (red.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (s. 135–152). New York: Springer.
- Grevholm, B. (2013). *Matematikkundervisning 1–7*. Oslo: Cappelen Damm AS.
- Polya, G. (1957). *How to solve it – a new aspect of mathematical methods*. Princeton: Princeton University Press.
- Stiegler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.